

Musterlösung zur Musterprüfung 2 in Mathematik

Diese Musterlösung enthält ausführliche Lösungen zu allen Aufgaben der Musterprüfung 2 in Mathematik sowie Hinweise zum Selbstlernen.

Literaturhinweise

- 1) Bosch: Brückenkurs Mathematik, Oldenbourg Verlag, München

Dieses Buch beinhaltet fast alle Themengebiete der Mathematikprüfung. Es enthält viele Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen.

- 2) Kusch: Mathematik (Band 1 – 4), Cornelsen Verlag, Berlin

Der 1. Band enthält alles Wissenswerte zur Arithmetik und Algebra. Seitenweise werden sehr übersichtlich Beispiele vorgerechnet und ausführlich kommentiert. Das Buch enthält Hunderte von Übungsaufgaben, deren Lösungen in einem extra Lösungsbuch zu finden sind.

Der 2. Band behandelt die Geometrie.

Der 3. und 4. Band haben die Differential- und Integralrechnung zum Thema. Auch hier werden seitenweise Beispiele vorgerechnet und ausführlich kommentiert. Die Bücher enthalten ebenfalls Hunderte von Übungsaufgaben, deren Lösungen in extra Lösungsbüchern zu finden sind.

Diese Bücher sind nicht nur für die Vorbereitung auf die Mathematikprüfung geeignet, sie können auch im Studium sehr hilfreich sein.

Die genannten Bücher gehören zu den Standardwerken der Mathematik und können in vielen Hochschulbibliotheken ausgeliehen werden.

Themenbereich I

Algebraische Umformungen

In diesem Themenbereich geht es um einfache algebraische Umformungen wie z.B.

→ Termumformungen

$$\text{Beispiel: } 3ab - 2a + 4b - ab - 3a + 2b = 2ab - 5a + 6b$$

→ Berücksichtigung von Minuszeichen vor Klammern

$$\text{Beispiel: } -(a + b - c) = -a - b + c$$

→ Ausmultiplizieren von Klammern

$$\text{Beispiele: } -a \cdot (b + c - d) = -ab - ac + ad$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

→ Faktorisieren von Termen / Ausklammern

$$\text{Beispiel: } 10ax - 8bx + 4cx = 2x \cdot (5a - 4b + 2c)$$

Aufgabe 84

Aus Differenzen und Summen darf nicht gekürzt werden. Das Kürzen von Brüchen ist nur aus Produkten erlaubt. Daher muss bei dieser Aufgabe der Zähler des Bruches zunächst in ein Produkt umgeformt werden. Im Zähler des Bruches steht eine Summe, in der jeder Summand ein a enthält. Dieses a kann ausgeklammert werden. In der Fachsprache sagt man auch: „Der Zähler wird faktorisiert.“

$$\frac{ax + ac}{ax}$$

/ a ausklammern

Beim Ausklammern wird jeder Summand durch a geteilt und das a wird vor die Klammer geschrieben. Zur Kontrolle kann das a wieder mit der Klammer ausmultipliziert werden. Das Ergebnis muss mit dem ursprünglichen Term übereinstimmen.

$$= \frac{a \cdot (x + c)}{ax}$$

/ Nun steht sowohl im Zähler als auch im Nenner des Bruches ein

Produkt, aus dem gemeinsame Faktoren gekürzt werden dürfen. Der gemeinsame Faktor ist hier das a , welches jetzt gekürzt werden darf.

$$= \frac{x + c}{x}$$

/ **Achtung:** Das x steht im Zähler in einer Summe und darf daher

nicht gekürzt werden!

Aufgabe 85

$(6x + 5y) - (-x + 9y)$ / Die Klammer um den ersten Term ist überflüssig
aber nicht falsch. Sie kann daher weggelassen
werden.

$= 6x + 5y - (-x + 9y)$ / Die Klammer um den zweiten Term wird benötigt,
da ein Minuszeichen vor der Klammer steht. Um
diese Klammer aufzulösen, muss der Term in der
Klammer mit -1 multipliziert werden.

$= 6x + 5y - 1 \cdot (-x + 9y)$ / ausmultiplizieren

$= 6x + 5y - 1 \cdot (-x) - 1 \cdot (+9y)$ / vereinfachen

$= 6x + 5y + x - 9y$ / sortieren

$= 6x + x + 5y - 9y$ / zusammenfassen

$= 7x - 4y$

Anmerkung: Häufig wird in der Schule gelernt, dass eine Klammer mit einem davorstehenden Minuszeichen so aufgelöst wird, dass sich alle Zeichen in der Klammer ändern. Diese Aussage gilt jedoch nur dann, wenn es sich bei dem Term in der Klammer um eine Summe oder Differenz handelt. Handelt es sich bei dem Ausdruck in der Klammer aber z.B. um einen Bruch, so darf das Minuszeichen entweder nur mit dem Zähler oder nur mit dem Nenner verrechnet werden. Würde das Minus sowohl mit dem Zähler als auch mit dem Nenner verrechnet werden, so hätte man Minus durch Minus gerechnet und das wäre wieder Plus.

$$\text{Beispiel: } -\left(\frac{2x-3}{1+4x^2}\right) = \frac{-(2x-3)}{1+4x^2} = \frac{-2x+3}{1+4x^2}$$

$$\text{oder } -\left(\frac{2x-3}{1+4x^2}\right) = \frac{2x-3}{-(1+4x^2)} = \frac{2x-3}{-1-4x^2}$$

Themenbereich II

Bruchrechnung

In diesem Themenbereich geht es um die Grundlagen der Bruchrechnung. Es werden Kenntnisse über das Erweitern und Kürzen von Brüchen, die Addition und Subtraktion sowie über die Multiplikation und Division geprüft.

Bei der Addition und Subtraktion ist darauf zu achten, dass die zu verrechnenden Brüche einen gemeinsamen Nenner besitzen. Sollte dies nicht der Fall sein, so müssen die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, den sog. Hauptnenner, gebracht werden.

$$\text{Beispiel: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Die Multiplikation von Brüchen ist demgegenüber wieder leichter, denn hier gilt „Zähler mal Zähler“ und „Nenner mal Nenner“. Eine Erweiterung auf einen Hauptnenner ist nicht erforderlich.

$$\text{Beispiel: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

$$\text{Beispiel: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Aufgabe 86

In dieser Aufgabe ist eine sogenannte gemischte Zahl enthalten. **Eine gemischte Zahl besteht aus der Summe einer ganzen Zahl und einem echten Bruch** (echter Bruch: Zähler < Nenner), wobei das „+“-Zeichen weggelassen wird. Zur besseren Verrechnung gemischter Zahlen werden diese in unechte Brüche (unechter Bruch: Zähler > Nenner) umgewandelt.

Beispiel: $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Ansonsten werden zur Lösung dieser Aufgabe die grundlegenden Rechenregeln der Bruchrechnung benötigt.

$$\frac{5 - \frac{7}{8}}{2\frac{1}{2}} \quad / 5 = \frac{5}{1}$$

$$= \frac{\frac{5}{1} - \frac{7}{8}}{2\frac{1}{2}}$$

/ Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem die Brüche

auf den Hauptnenner gebracht werden. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 1 und 8 ist 8.

$$= \frac{\frac{5 \cdot 8}{1 \cdot 8} - \frac{7}{8}}{2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{40}{8} - \frac{7}{8}}{2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{33}{8}}{2\frac{1}{2}}$$

/ umwandeln der gemischten Zahl

$$\frac{33}{\frac{8}{\frac{5}{2}}}$$

/ Durch einen Bruch wird dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

$$= \frac{33 \cdot 2}{8 \cdot 5}$$

/ Brüche werden multipliziert, indem Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner gerechnet wird.

$$= \frac{33 \cdot 2}{8 \cdot 5}$$

/ Damit die Zahlen nicht so groß werden und sich dann schlecht im Kopf verrechnen lassen, kann der Bruch an dieser Stelle gekürzt werden. Brüche werden gekürzt, indem der Zähler und der Nenner durch die gleiche Zahl (oder Variable) dividiert werden. Sowohl der Zähler als auch der Nenner können hier durch 2 geteilt werden.

$$= \frac{33 \cdot 1}{4 \cdot 5}$$

/ multiplizieren

$$= \frac{33}{20}$$

/ Bei diesem Bruch handelt es sich um einen unechten Bruch, da der Zähler größer als der Nenner ist. Daher kann dieser Bruch wieder in eine gemischte Zahl umgewandelt werden.

$$= \frac{20}{20} + \frac{13}{20}$$

$$= 1 + \frac{13}{20}$$

$$= 1 \frac{13}{20}$$

Aufgabe 87

Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem die Brüche auf den Hauptnenner gebracht werden.

$$\frac{3}{6} - \frac{1}{18}$$

/ erweitern auf den Hauptnenner

Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame

Vielfache aller Nenner. Das kleinste gemeinsame

Vielfache von 6 und 18 ist 18.

$$= \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{1}{18}$$

$$= \frac{9}{18} - \frac{1}{18}$$

/ Die Zähler werden nun subtrahiert, der Nenner

bleibt erhalten.

$$= \frac{9-1}{18}$$

/ ausrechnen

$$= \frac{8}{18}$$

/ kürzen

Brüche werden gekürzt, indem der Zähler und der

Nenner durch die gleiche Zahl (oder Variable)

dividiert werden.

$$= \frac{8:2}{18:2}$$

/ ausrechnen

$$= \frac{4}{9}$$

Themenbereich III

Einfache Berechnungen

In diesem Themenbereich geht es um das Kopfrechnen. Einfache Aufgaben, bei denen auf Regeln wie Punkt- vor Strichrechnung geachtet werden muss, sollen gelöst werden. Ebenso können Klammern, einfache Wurzeln oder Potenzen enthalten sein.

Beispiele: $3 \cdot 5 - 12 : 4 = 15 - 3 = 12$

$$4 \cdot (10 \cdot 2 - 9) = 4 \cdot (20 - 9) = 4 \cdot 11 = 44$$

$$\sqrt{36} \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{9} = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 = 21$$

$$3^2 + 5 \cdot 2^3 = 9 + 5 \cdot 8 = 9 + 40 = 49$$

Aufgabe 88

Bei dieser Aufgabe geht es um die „Vorfahrtsregeln“ in der Mathematik. Dabei werden zuerst die Klammern ausgerechnet und dann gilt Punkt- vor Strichrechnung.

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (7 - 9) + 2 \cdot 8 && / \text{ berechnen der Klammer} \\ & = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 8 && / \text{ Punkt- vor Strichrechnung} \\ & && 3 \cdot (-2) = -6 \\ & && 2 \cdot 8 = 16 \\ & = -6 + 16 && / \text{ ausrechnen} \\ & = 10 \end{aligned}$$

Vorzeichenregeln:

$$\begin{aligned} +x + (+y) &= x + y \\ +x + (-y) &= x - y \\ +x - (+y) &= x - y \\ +x - (-y) &= x + y \\ -x + (+y) &= -x + y \\ -x + (-y) &= -x - y \\ -x - (+y) &= -x - y \\ -x - (-y) &= -x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +x \cdot (+y) &= xy \\ +x \cdot (-y) &= -xy \\ -x \cdot (+y) &= -xy \\ -x \cdot (-y) &= xy \\ +x : (+y) &= x : y \\ +x : (-y) &= -x : y \\ -x : (+y) &= -x : y \\ -x : (-y) &= x : y \end{aligned}$$

Aufgabe 89

Auch bei dieser Aufgabe geht es um die „Vorfahrtsregeln“ in der Mathematik. Wenn wie in dieser Aufgabe Potenzen enthalten sind, dann gilt: **Potenzen vor Punkt- vor Strichrechnung**.

Zusätzlich ist für die Lösung dieses Aufgabentyps die Kenntnis der gängigsten Quadratwurzeln erforderlich.

So gilt z.B.: $\sqrt{0} = 0$, denn $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

$$\sqrt{9} = 3, \quad \text{denn } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\sqrt{36} = 6, \quad \text{denn } 6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

$$\sqrt{100} = 10, \quad \text{denn } 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$3 - 4^2 \cdot 2 + \sqrt{25} \quad / \text{Potenzen zuerst}$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$= 3 - 16 \cdot 2 + \sqrt{25} \quad / \sqrt{25} = 5, \text{ denn } 5 \cdot 5 = 25$$

$$= 3 - 16 \cdot 2 + 5 \quad / \text{Punkt- vor Strichrechnung}$$

$$= 3 - 32 + 5 \quad / \text{ausrechnen}$$

$$= -29 + 5 \quad / \text{ausrechnen}$$

$$= -24$$

Themenbereich IV

Geometrie

In diesem Themenbereich geht es um grundlegende Berechnungen zu geometrischen Figuren wie z.B. **Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreis und gerade Prismen (z.B. Quader)**. Dazu ist die Kenntnis der folgenden Formeln erforderlich:

Quadrat mit der Seitenlänge a

$$\text{Flächeninhalt: } A_Q = a \cdot a = a^2 \qquad \text{Umfang: } U_Q = 4a$$

Rechteck mit den Seitenlängen a und b

$$\text{Flächeninhalt: } A_R = a \cdot b \qquad \text{Umfang: } U_R = 2a + 2b$$

Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c

$$\text{Flächeninhalt: } A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \qquad \text{Umfang: } U_D = a + b + c$$

Wobei g eine der drei Seiten ist und h die zugehörige Höhe.

Kreis mit dem Radius r

$$\text{Flächeninhalt: } A_K = \pi \cdot r^2 \qquad \text{Umfang: } U_K = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Wobei $\pi \approx 3$ gelten soll.

Prismen mit der Grundfläche G und der Höhe h

$$\text{Volumen: } V_p = G \cdot h \qquad \text{Oberfläche: } O_p = 2 \cdot G + M$$

Wobei M die Mantelfläche ist.

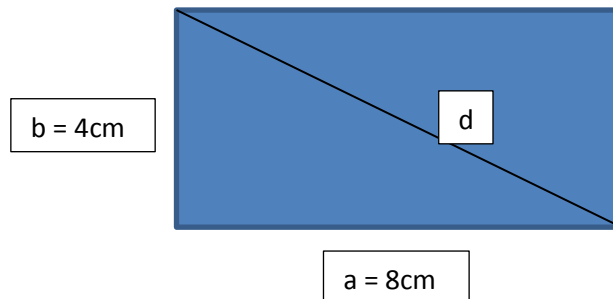
Quader mit den Kantenlängen a, b und c

$$\text{Volumen: } V_Q = a \cdot b \cdot c \qquad \text{Oberfläche: } O_Q = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

Außerdem können in diesem Themenbereich Aufgaben zur Anwendung des **Satzes von Pythagoras** gestellt werden. Dazu findet sich eine ausführliche Erklärung in den folgenden Musterlösungen.

Aufgabe 90

Bei der Lösung dieser Aufgabe hilft zunächst einmal eine kleine Skizze:



In diesem Rechteck ist ein rechtwinkliges Dreieck zu erkennen, das von den Seiten a und b sowie von der Diagonalen d gebildet wird.

Auf rechtwinklige Dreiecke lässt sich der **Satz des Pythagoras** anwenden:

Die Summe der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Wobei die Katheten die Seiten sind, die an dem rechten Winkel anliegen. Die Hypotenuse ist die Seite, die gegenüber vom rechten Winkel liegt.

In dieser Aufgabe sind also $a = 8\text{cm}$ und $b = 4\text{cm}$ die Katheten und d ist die Hypotenuse.

Somit lautet der Satz des Pythagoras für dieses Dreieck:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = d^2 && / \text{ einsetzen für a und b} \\ \Leftrightarrow & (8\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2 = d^2 && / \text{ quadrieren} \\ \Leftrightarrow & 64\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2 = d^2 && / \text{ addieren} \\ \Leftrightarrow & 80\text{cm}^2 = d^2 && / \text{ Wurzel ziehen} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{80\text{cm}} = d \end{aligned}$$

Anmerkung: Der Satz des Pythagoras besteht aus einer Gleichung, die umgeformt werden kann und in die Zahlen eingesetzt werden können. Zwischen diese Gleichungen werden Äquivalenzpfeile \Leftrightarrow gesetzt, die angeben, dass die Umformungen/Berechnungen von Zeile zu Zeile äquivalent (gleichwertig) zueinander sind.

Aufgabe 91

Für die Lösung dieser Aufgabe wird die folgende Formel benötigt:

Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r:

$$A_K = \pi \cdot r^2$$

π ist die sogenannte Kreiszahl und irrational, d.h. es handelt sich um eine Dezimalzahl (Kommazahl), die nach dem Komma nicht endet und auch nicht periodisch ist. Die ersten Stellen von π lauten:

$\pi = 3,141592653\dots$. Da für die Berechnung der Prüfungsaufgaben kein Taschenrechner zugelassen ist, wird mit einem gerundeten Wert gerechnet: $\pi \approx 3$.

Der Durchmesser eines Kreises ist doppelt so lang wie sein Radius. Da der Durchmesser des Kreises 6cm beträgt, ist der Radius 3cm.

$$A_K = \pi \cdot r^2 \quad / \text{ einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow A_K = \pi \cdot (3\text{cm})^2 \quad / \text{ quadrieren}$$

$$\Leftrightarrow A_K = \pi \cdot 9\text{cm}^2 \quad / \text{ multiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow A_K \approx 27\text{cm}^2 \quad / \approx \text{ wird verwendet, da } \pi \text{ gerundet ist}$$

Themenbereich V

Lineare Gleichungen und Gleichungen, die sich auf lineare Gleichungen

zurückführen lassen

In diesem Themenbereich wird das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die sich auf lineare Gleichungen zurückführen lassen, überprüft. Hierbei können zum einen Gleichungen vorgegeben sein, die zu lösen sind. Zum anderen können aber auch Textaufgaben gestellt werden, zu denen dann eine passende Gleichung aufgestellt und eventuell auch gelöst werden soll. Bei Textaufgaben empfiehlt sich eine Aufteilung des Textes in einzelne Abschnitte. Ein ausführliches Beispiel dazu findet sich in der Musterlösung zur Musterprüfung 1.

Aufgabe 92

Je nachdem, wie eine Gleichung aufgebaut ist, gibt es einschränkende Bedingungen für die Lösung der Gleichung.

Bei Brüchen darf der Nenner nicht null werden, da eine Division mit null nicht definiert ist.

In der angegebenen Gleichung sind zwei Brüche enthalten.

→ Der erste Bruch $\frac{3}{2x}$ besitzt den Nenner $2x$. Dieser Nenner wird für $x = 0$ null, da $2 \cdot 0 = 0$ ist.

→ Der zweite Bruch $\frac{4}{2x-1}$ besitzt den Nenner $2x-1$. Dieser Nenner wird für $x = \frac{1}{2}$ null, da $2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$ ist.

Somit müssen die Zahlen $x_1 = 0$ \wedge $x_2 = \frac{1}{2}$ für diese Gleichung ausgeschlossen werden.

Aufgabe 93

Häufig lassen sich Aufgaben in der Mathematik auf verschiedene Arten lösen. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich die gegebene Gleichung lösen lässt und worauf geachtet werden muss.

1. Variante Lösung mit Hilfe der binomischen Formeln

$$(x-3)^2 = (x+3)(x-3) \quad / \text{Anwendung der binomischen Formeln}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 9 \quad / -x^2$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 = -9 \quad / -9$$

$$\Leftrightarrow -6x = -18 \quad / \div (-6)$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\mathbb{L}=\{3\}$$

Die binomischen Formeln

$$1) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2) \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3) \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Variante Lösung über das Ausmultiplizieren der Klammern

$$(x-3)^2 = (x+3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-3) = (x+3)(x-3) \quad / \text{ausmultiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 3x + 3x - 9 \quad / \text{zusammenfassen}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 9 \quad / -x^2$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 = -9 \quad / -9$$

$$\Leftrightarrow -6x = -18 \quad / \div (-6)$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\mathbb{L}=\{3\}$$

Themenbereich VI

Lineare Gleichungssysteme

In diesem Themenbereich geht es um lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten. Auch hier kann sowohl ein lineares Gleichungssystem vorgegeben sein, als auch eine Textaufgabe gestellt werden, aus der ein passendes lineares Gleichungssystem aufgestellt werden soll.

Für das Lösen linearer Gleichungssysteme stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung. Diese Verfahren werden in der folgenden Musterlösung dargestellt.

Textaufgaben können in einzelne Bestandteile zerlegt werden, um so die verschiedenen Gleichungen aufstellen zu können. Hierzu findet sich in der Musterlösung zur Musterprüfung 1 ein ausführliches Beispiel.

Aufgabe 94

Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit Hilfe verschiedener Verfahren lösen. Dazu gehören z.B. das Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren. Je nachdem, wie das Gleichungssystem aufgebaut ist, ist das eine oder andere Verfahren für die Lösung des Systems günstiger.

Nach dem **Einsetzungsverfahren** ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$\begin{array}{llll} -2x + 5y = 12 & / -5y & \wedge & -6x - 3y = 0 & / :3 \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & -2x - y = 0 & / \text{Die } 12 - 5y \text{ der} \\ & & & & \text{linken Gleichung} \\ & & & & \text{können nun für die} \\ & & & & -2x \text{ der rechten} \\ & & & & \text{Gleichung einge-} \\ & & & & \text{setzt werden.} \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & 12 - 5y - y = 0 & / \text{zusammenfassen} \\ & & & & \text{der rechten} \\ & & & & \text{Gleichung} \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & 12 - 6y = 0 & / -12 \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & -6y = -12 & / :(-6) \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & y = 2 & / \text{Nun wird der} \\ & & & & \text{errechnete Wert für} \\ & & & & y \text{ in die linke} \\ & & & & \text{Gleichung} \\ & & & & \text{eingesetzt.} \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5 \cdot 2 & & \wedge & y = 2 & \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 10 & & \wedge & y = 2 & \\ \Leftrightarrow -2x = 2 & / :(-2) & \wedge & y = 2 & \\ \Leftrightarrow x = -1 & & \wedge & y = 2 & \end{array}$$

Nach dem Gleichsetzungsverfahren ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$\begin{array}{llll} -2x + 5y = 12 & / -5y & \wedge & -6x - 3y = 0 & / +3y \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & -6x = 3y & / :3 \\ \Leftrightarrow -2x = 12 - 5y & & \wedge & -2x = y & / \text{Die jeweils rechten} \\ & & & & \text{Seiten der} \\ & & & & \text{Gleichungen können} \\ & & & & \text{nun gleichgesetzt} \\ & & & & \text{werden.} \\ \Leftrightarrow 12 - 5y = y & / +5y & \wedge & -2x = y & \\ \Leftrightarrow 12 = 6y & / :6 & \wedge & -2x = y & \\ \Leftrightarrow 2 = y & & \wedge & -2x = 2 & / :(-2) \\ \Leftrightarrow y = 2 & & \wedge & x = -1 & \end{array}$$

Nach dem **Additionsverfahren** ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$-2x + 5y = 12$$

$$\wedge \quad -6x - 3y = 0 \quad / : (-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x + 5y = 12$$

$$\wedge \quad +2x + y = 0$$



Addition der beiden Gleichungen

$$\Leftrightarrow \quad 6y = 12 \quad / : 6$$

$$\wedge \quad 2x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2 \quad / \text{ einsetzen in die zweite Gleichung}$$

$$\wedge \quad 2x + 2 = 0 \quad / \text{ nach x auflösen}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2$$

$$\wedge \quad x = -1$$

Aufgabe 95

Nach dem **Gleichsetzungsverfahren** ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$\begin{aligned} & 5x + 2y = 8 \quad \wedge \quad 10x + 4y = 15 \quad / : 2 \\ \Leftrightarrow & 5x + 2y = 8 \quad \wedge \quad 5x + 2y = 7,5 \quad / \text{ Die jeweils rechten Seiten der} \\ & \hspace{15em} \text{Gleichungen können nun} \\ & \hspace{15em} \text{gleichgesetzt werden.} \\ \Leftrightarrow & 8 = 7,5 \quad \wedge \quad 5x + 2y = 7,5 \end{aligned}$$

Die linke Gleichung besteht aus der falschen Aussage $8 = 7,5$ und dieses bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Das heißt, es existieren keine Zahlen, die gleichzeitig beide Gleichungen des Systems erfüllen.

Nach dem **Additionsverfahren** ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$\begin{aligned} & 5x + 2y = 8 \\ \wedge & 10x + 4y = 15 \quad / : (-2) \\ \hline \Leftrightarrow & 5x + 2y = 8 \\ \wedge & -5x - 2y = -7,5 \quad \text{Addition der beiden Gleichungen} \\ \hline \Leftrightarrow & 5x + 2y = 8 \\ \wedge & 0 = 0,5 \quad \text{Diese Gleichung besteht aus einer falschen Aussage.} \end{aligned}$$

Damit besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Themenbereich VII

Lösen von quadratischen Gleichungen

In diesem Themenbereich geht es um das Lösen quadratischer Gleichungen. Hierfür stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung, von denen einige in den Musterlösungen dargestellt werden. Auch hier könnte es sein, dass leichte Textaufgaben, die das Aufstellen und Lösen einer quadratischen Gleichung erfordern, gestellt werden.

Aufgabe 96

Für das Lösen quadratischer Gleichungen stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung. Dazu gehören z.B. die **pq-Formel** und die **abc-Formel**, die auch als **Mitternachtsformel** bezeichnet wird.

1. Lösung mit Hilfe der **pq-Formel**

$$x^2 + 4x - 24 = 0$$

/ Hierbei handelt es sich um die Normalform einer

quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit

$p = +4$ und $q = -24$.

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{+4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{+4}{2}\right)^2 - (-24)} \quad / \text{pq-Formel: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 24}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{28}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{28} - 2$$

2. Lösung mit Hilfe der **abc-Formel**

$$x^2 + 4x - 24 = 0$$

/ Diese Gleichung entspricht der

Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit

$a = +1$, $b = +4$ und $c = -24$.

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{+4}{2 \cdot (+1)} \pm \frac{\sqrt{(+4)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (+1)} \quad / \text{abc-Formel:}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 + 96}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{112}}{2}$$

Aufgabe 97

Diese Gleichung wird zunächst auf die Normalform einer quadratischen Gleichung gebracht.

Normalform einer quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$

$$x + 4 = -\frac{4}{x} \quad / \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = -4 \quad / + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \quad / \text{ Diese Gleichung kann nun auf verschiedene Arten gelöst werden.}$$

1. Lösung mit Hilfe einer **binomischen Formel**

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad / \text{ Hierbei handelt es sich um die } \mathbf{1. \text{ Binomische Formel:}}$$

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad / - 2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Die Gleichung besitzt genau eine Lösung.

2. Lösung mit Hilfe der **pq-Formel**

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

/ Normalform einer quadratischen Gleichung mit

$$p = +4 \text{ und } q = +4.$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{+4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{+4}{2}\right)^2 - (+4)} \quad / \text{ pq-Formel: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{0}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -2$$

Die Gleichung besitzt genau eine Lösung.

Lösen von Ungleichungen

In diesem Themenbereich wird das Lösen von Ungleichungen überprüft. Grundsätzlich können Ungleichungen wie Gleichungen gelöst werden. Es sind jedoch zwei Besonderheiten bei der Lösung von Ungleichungen zu beachten:

- 1) Bei der Multiplikation oder Division einer Ungleichung mit einer negativen Zahl ändert sich die Relation.

Beispiel: $-2 \leq 3$ $/ \cdot (-1)$

$$\Leftrightarrow 2 \geq -3$$

- 2) Wenn der Kehrwert einer Ungleichung gebildet wird, ändert sich die Relation.

Beispiel: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ $/$ Kehrwert der Ungleichung

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1} \geq \frac{2}{1} \quad / \frac{4}{1} = 4, \frac{2}{1} = 2$$
$$\Leftrightarrow 4 \geq 2$$

Aufgabe 98

$$3x - 13 > 4x + 7 \quad / -4x \quad (\text{Auf jeder Seite der Ungleichung m\u00fcssen die } 4x \text{ subtrahiert werden.})$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x - 13 > 4x - 4x + 7 \quad / \text{ zusammenfassen}$$

$$\Leftrightarrow -x - 13 > 7 \quad / +13 \quad (\text{Auf jeder Seite der Ungleichung muss die } 13 \text{ addiert werden.})$$

$$\Leftrightarrow -x - 13 + 13 > 7 + 13 \quad / \text{ zusammenfassen}$$

$$\Leftrightarrow -x > 20 \quad / :(-1)$$

Achtung: An dieser Stelle wird mit einer negativen Zahl dividiert! Daher muss sich die Relation \u00e4ndern!

(Auf jeder Seite der Ungleichung muss $:(-1)$ gerechnet werden.)

$$\Leftrightarrow -x : (-1) < 20 : (-1) \quad / \text{ ausrechnen}$$

$$\Leftrightarrow x < -20$$

Aufgabe 99

Die senkrechten Striche um den Term $x + 5$ werden als Betragsstriche bezeichnet. Der Term $|x + 5|$ heißt der Betrag von $x + 5$ und bedeutet, dass das Ergebnis von diesem Ausdruck – unabhängig davon, welche Zahl für x eingesetzt wird – immer positiv ist.

Beispiele: Für $x = 2$ gilt: $|2 + 5| = |7| = 7$.

Für $x = 0$ gilt: $|0 + 5| = |5| = 5$.

Für $x = -3$ gilt: $|-3 + 5| = |2| = 2$.

Für $x = -10$ gilt: $|-10 + 5| = |-5| = 5$.

Für $x = -21$ gilt: $|-21 + 5| = |-16| = 16$.

Da also immer $|x + 5| > 0$ gilt, ist die Ungleichung $|x + 5| > -1$ immer erfüllt. Es dürfen also alle Zahlen für x eingesetzt werden.

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R}$

Anmerkung: \mathbb{R} ist das Symbol für die reellen Zahlen. Dabei handelt es sich um alle Zahlen, die sich auf einer Zahlengeraden abbilden lassen.

Beispiele für reelle Zahlen sind: 5 ; $-\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; π .

Themenbereich IX

Potenzen und Wurzeln

Für diesen Themenbereich ist die Kenntnis der **Potenzgesetze** von Bedeutung:

$$\rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\rightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\rightarrow a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\rightarrow \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Außerdem können die folgenden **Umschreibregeln** hilfreich sein:

$$\rightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Aufgabe 100

Bei ineinander verschachtelten Wurzeln kann man z.B. mit dem Umwandeln der innersten Wurzel beginnen.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\sqrt{a}} & / \sqrt{a} &= \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}} \text{ mit der Umschreibregel } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ & = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} & / \text{ Nun wird die äußere Wurzel auf die gleiche Art und Weise} \\ & & & \text{umgewandelt.} \\ & = \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} & / \text{ Mit Hilfe des Potenzgesetzes } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \text{ lässt sich der} \\ & & & \text{Term vereinfachen.} \\ & = a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} & / \text{ ausrechnen des Exponenten} \\ & = a^{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}} \\ & = a^{\frac{1}{6}} & / \text{ Nach dem Zusammenfassen lässt sich diese Potenz wieder} \\ & & & \text{mit Hilfe der Umschreibregel } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ als Wurzel} \\ & = \sqrt[6]{a} & & \text{schreiben.} \end{aligned}$$

Anmerkung: Wenn an einem Buchstaben oder einer Zahl kein Exponent steht, dann bedeutet dies immer, dass der Buchstabe oder die Zahl mit 1 potenziert wird: $5 = 5^1$ oder $a = a^1$.

Wenn an einer Wurzel kein Wurzelexponent notiert ist, dann handelt es sich immer um die Quadratwurzel: $\sqrt{5} = \sqrt[2]{5}$ oder $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

Aufgabe 101

$$a^{3n+2} \cdot a^{2-5n} \cdot a$$

$$/ a = a^1$$

$$= a^{3n+2} \cdot a^{2-5n} \cdot a^1$$

$$/ \text{Potenzgesetz: } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert,
indem man die Exponenten addiert.

$$= a^{3n+2+2-5n+1}$$

/ zusammenfassen des Exponenten

$$= a^{-2n+5}$$

Themenbereich X

Einfache Zins- und Zinseszinsrechnung

Aufgaben zur Zins- und Zinseszinsrechnung lassen sich entweder mit Hilfe von Formeln oder über einen Dreisatz lösen.

Um **Zinseszinsrechnung** handelt es sich, wenn Zinsen, die am Ende eines Jahres gut geschrieben werden, auf dem Konto verbleiben. Die Zinsen erhöhen damit das Anfangskapital für das darauf folgende Jahr. Die Formel lautet:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

K_n gibt das Gesamtkapital nach n Jahren an.

K_0 ist das Anfangskapital.

$q = 1 + \frac{p}{100}$ ist der Aufzinsungsfaktor.

p ist der Zinssatz in Prozent.

n ist die Laufzeit in Jahren.

Für die **einfache Zinsrechnung** gelten die folgenden Formeln:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100}$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die **Zinsen für ein**

Jahr berechnen.

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die **Zinsen für t**

Tage berechnen.

Z gibt die Zinsen an, K steht für das Kapital, p für den Zinssatz in Prozent und t für die Anzahl der Tage.

Diese Formeln können auch nach K, p oder t umgestellt werden.

Hinweis: In der Zinsrechnung wird **jeder Monat mit 30 Tagen** gerechnet!

Die Lösung über einen Dreisatz wird in den Musterlösungen dargestellt.

Aufgabe 102

1. Lösung mit Hilfe der einfachen Zinsformel

Da hier nach dem Zinssatz gefragt ist, muss die Formel nach p umgestellt werden:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \quad / : K$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z}{K} = \frac{p}{100} \quad / \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z}{K} \cdot 100 = p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{Z}{K} \cdot 100$$

Das Kapital beträgt $K = 10.000 \text{ €}$.

Die Zinsen für $\frac{1}{2}$ Jahr betragen $10.600 \text{ €} - 10.000 \text{ €} = 600 \text{ €}$

Für ein ganzes Jahr fallen dann Zinsen in Höhe von $Z = 2 \cdot 600 \text{ €} = 1.200 \text{ €}$ an.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$p = \frac{1.200\text{€}}{10.000\text{€}} \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = 12\%$$

2. Lösung mit Hilfe eines Dreisatzes

Das Kapital entspricht 100% :

:100	}	100% = 10.000 €	}	:100
	}	1% = 100 €	}	
· 12	}	12% = 1.200 €	}	· 12

Damit beträgt der gesuchte Zinssatz 12% .

Aufgabe 103

1. Lösung mit Hilfe der Zinseszinsformel

Laut Aufgabenstellung ist das Endkapital inklusive Zins und Zinseszins gesucht. Das heißt, die Zinsen, die nach einem Jahr von der Bank gut geschrieben werden, werden nicht vom Kunden abgehoben, sondern für das zweite Jahr den 10.000 € zugerechnet und mit verzinst.

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

K_n gibt das Gesamtkapital nach n Jahren an.

K_0 ist das Anfangskapital.

$q = 1 + \frac{p}{100}$ ist der Aufzinsungsfaktor.

p ist der Zinssatz in Prozent.

n ist die Laufzeit in Jahren.

Gegeben ist: $K_0 = 10.000\text{€}$

$$p = 5\% \quad \Rightarrow \quad q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

$n = 2$ Jahre

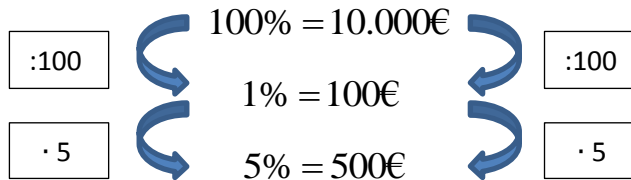
Gesucht ist: K_2

Lösung: $K_n = K_0 \cdot q^n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_2 &= 10.000\text{€} \cdot 1,05^2 \\ &= 10.000\text{€} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ &= 10.500\text{€} \cdot 1,05 \\ &= 11.025\text{€} \end{aligned}$$

2. Lösung in mehreren kleinen Schritten über einen Dreisatz

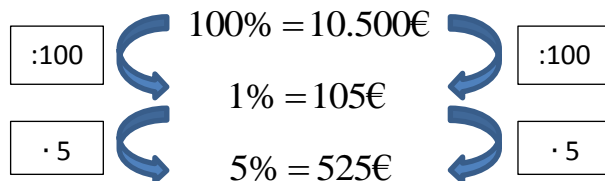
Schritt 1: Berechnung der Zinsen nach einem Jahr (Dreisatz)



Schritt 2: Berechnung des Kapitals am Ende des 1.Jahres

$$10.000\text{€} + 500\text{€} = 10.500\text{€}$$

Schritt 3: Berechnung der Zinsen für das 2.Jahr (Dreisatz)



Schritt 4: Berechnung des Endkapitals nach zwei Jahren

$$10.500\text{€} + 525\text{€} = 11.025\text{€}$$

Themenbereich XI

Prozentrechnung

Aufgaben zur Prozentrechnung lassen sich entweder mit der Hilfe von Formeln oder über einen Dreisatz lösen.

Die Formeln lauten

für den Prozentwert PW:

$$PW = G \cdot \frac{p}{100},$$

für den Grundwert G:

$$G = PW \cdot \frac{100}{p},$$

für den Prozentsatz p:

$$p = \frac{PW}{G} \cdot 100.$$

Sowohl die Anwendung der Formeln als auch die Lösung über einen Dreisatz werden in den folgenden Musterlösungen dargestellt.

Aufgabe 104

Der ursprüngliche Preis einer Ware entspricht 100%. Wenn der Preis der Ware um 40% gesenkt wird, dann entspricht der neue Preis $100\% - 40\% = 60\%$.

1. Lösung mit Hilfe einer Formel

Der gesuchte ursprüngliche Preis entspricht dem Grundwert G .

$$G = PW \cdot \frac{100}{p}$$

G ist der Grundwert.

PW ist der Prozentwert.

p ist der Prozentsatz.

Gegeben ist: $PW = 36,00\text{€}$ (der neue, reduzierte Kaufpreis)

$$p = 60\%$$

Gesucht ist: G

Lösung:

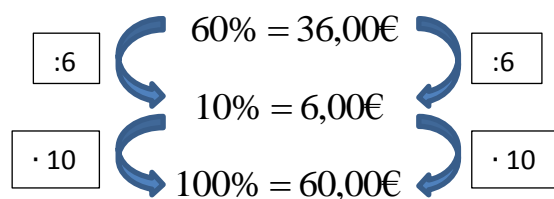
$$G = PW \cdot \frac{100}{p}$$

$$\Rightarrow G = 36,00\text{€} \cdot \frac{100}{60}$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{3.600,00\text{€}}{60}$$

$$\Leftrightarrow G = 60,00\text{€}$$

2. Lösung mit Hilfe eines Dreisatzes



Der ursprüngliche Preis betrug 60,00€.

Aufgabe 105

1. Lösung mit Hilfe einer Formel

$$G = PW \cdot \frac{100}{p}$$

G ist der Grundwert.

PW ist der Prozentwert.

p ist der Prozentsatz.

Gegeben ist: $PW = 720m$

$$p = 6\%$$

Gesucht ist: G

Lösung:

$$G = PW \cdot \frac{100}{p}$$

$$\Rightarrow G = 720m \cdot \frac{100}{6}$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{72.000m}{6}$$

$$\Leftrightarrow G = 12.000m$$

2. Lösung mit Hilfe eines Dreisatzes

:6	}	$6\% = 720m$	}	:6
		$1\% = 120m$		
· 100	}	$100\% = 12.000m$	}	· 100

100% sind 12.000m.

Themenbereich XII

Verständnis von Graphen

(ohne trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktion)

In diesem Themenbereich werden Aufgaben zum Verständnis von Graphen gestellt.

Dabei kann es sich z.B. um die folgenden Aufgabentypen handeln:

- Es sollen Aussagen über das Aussehen/ den Graphen einer bestimmten Funktion getroffen werden.
- Einem Graphen soll die entsprechende Funktionsgleichung zugeordnet werden.
- Einem Sachverhalt aus einer Textaufgabe soll ein passender Graph zugeordnet werden.

Für die Lösung dieser Aufgaben werden überwiegend Kenntnisse über lineare Funktionen (Geraden) und quadratische Funktionen (Parabeln) benötigt.

Aufgabe 106

Die Verläufe der beiden dargestellten Graphen sind völlig identisch. Der Graph zu der Funktion $g(x)$ ist lediglich um vier Einheiten im Vergleich zum Graphen der Funktion $f(x)$ nach oben verschoben worden. Dieses bedeutet, dass zu allen y -Werten der Funktion $f(x)$ eine 4 addiert werden muss, um die Funktion $g(x)$ zu erhalten. Da $y = f(x)$ gilt, lautet die gesuchte Formel: $g(x) = f(x) + 4$.

Aufgabe 107

→ Bei der Funktion $f(x) = -x^2 - 2x$ handelt es sich um eine **quadratische Funktion**, da das x mit dem höchsten Exponenten x^2 lautet. Der Graph einer quadratischen Funktion stellt eine **Parabel** dar. Alle abgebildeten Graphen stellen Parabeln dar, so dass eine genauere Betrachtung erforderlich ist.

→ Wenn wie hier **vor dem x^2 ein Minuszeichen** steht, dann bedeutet dies, dass die **Parabel nach unten geöffnet** ist. Damit können die Lösungsvorschläge a und b nicht richtig sein.

→ Als nächstes lässt sich die Funktionsvorschrift durch Ausklammern von $-x$ umformen zu

$$f(x) = -x^2 - 2x = -x(x + 2).$$

Aus dieser Form lassen sich die **Nullstellen der Parabel** ablesen. Als Nullstellen werden die x -Werte bezeichnet, an denen der Graph der Funktion die x -Achse berührt oder schneidet. Für alle Nullstellen gilt, dass die zugehörige y -Koordinate null ist. Da $y = f(x)$ ist, muss überlegt werden, für welche x -Werte $y = f(x) = -x(x + 2) = 0$ ist. Diese x -Werte lassen sich direkt ablesen. Es handelt sich um **$x = 0$** und **$x = -2$** , denn $f(0) = -0(0 + 2) = 0$ und $f(-2) = -(-2)(-2 + 2) = 0$.

Somit ist Lösungsvorschlag d richtig. Die abgebildete Parabel ist nach unten geöffnet und besitzt die Nullstellen $x = 0$ und $x = -2$.

Ausführliche Berechnung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x \cdot (x + 2) = 0$$

/ Ein Produkt wird immer dann null, wenn einer der Faktoren null wird.

$$\Leftrightarrow -x = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

Themenbereich XIII

Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Themenbereich geht es um Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik.

Es geht unter anderem um ein- und mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Fakultäten.

Aufgabe 108

Ein Würfel besitzt sechs Seiten mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Beim Würfeln besitzt jede dieser Zahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit gewürfelt zu werden. Die Wahrscheinlichkeit, eine der sechs

Zahlen zu würfeln, beträgt demnach $P(E) = \frac{1}{6}$. Wenn 360 Mal gewürfelt wird, dann kann man

$\frac{1}{6} \cdot 360 = 60$ Mal erwarten, eine der sechs Ziffern zu würfeln. Es ist dabei egal, um welche der

sechs Ziffern es sich handeln soll. Bei 360 Würfeln ist also damit zu rechnen, dass jede Ziffer 60 Mal gewürfelt wird.

Anmerkung: Für die **Wahrscheinlichkeit** P eines gewünschten Ereignisses E gilt:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der gewünschten Ereignisse } E}{\text{Anzahl aller möglichen Ereignisse}}$$

Das gewünschte Ereignis E ist hier der Wurf einer der sechs Ziffern.

\Rightarrow Anzahl der gewünschten Ereignisse $E = 1$.

Alle möglichen Ereignisse stellen die sechs Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 dar.

\Rightarrow Anzahl aller möglichen Ereignisse = 6.

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{6}$$

Aufgabe 109

Für die **Wahrscheinlichkeit** P eines gewünschten Ereignisses E gilt:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der gewünschten Ereignisse } E}{\text{Anzahl aller möglichen Ereignisse}}$$

→ Das gewünschte Ereignis E ist das Ziehen einer roten Kugel. In der Urne befinden sich fünf rote Kugeln.

⇒ Anzahl der gewünschten Ereignisse $E = 5$.

→ Insgesamt befinden sich in der Urne $5 + 4 + 3 = 12$ Kugeln.

⇒ Anzahl aller möglichen Ereignisse = 12.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine rote Kugel gezogen wird, beträgt demnach

$$P(E) = \frac{5}{12}.$$

Themenbereich XIV

Grundkenntnisse der trigonometrischen Funktionen

In diesem Themenbereich geht es insbesondere um die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion.

Geprüft werden Kenntnisse über die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck, die Nullstellen der Sinus- und Kosinusfunktionen sowie einfache Symmetrieeigenschaften. Außerdem wird die Fähigkeit erwartet, Winkel vom Gradmaß in das Bogenmaß umzurechnen und umgekehrt.

Im **rechtwinkligen Dreieck** gelten die folgenden trigonometrischen Beziehungen:

$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Für die **Umrechnung von Winkeln vom Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt** kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

Aufgabe 160

Für die Umrechnung von Winkeln vom Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

Diese Formel gibt an, dass sich der Winkel α zu 360° genauso verhält, wie die Bogenlänge x zu 2π .

Beispiele:

1) Gegeben ist der Winkel $\alpha = 90^\circ$. Gesucht ist das zugehörige Bogenmaß x .

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \quad / \cdot 2\pi, \text{ umstellen der Formel nach } x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi = x \quad / \text{ einsetzen für } \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = x \quad / \text{ kürzen des Bruches}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 2\pi = x \quad / \text{ vereinfachen}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pi$$

Zu dem Winkel $\alpha = 90^\circ$ gehört also das Bogenmaß $x = \frac{1}{2} \pi$.

2) Gegeben ist das Bogenmaß $x = \pi$. Gesucht ist der zugehörige Winkel α .

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \quad / \cdot 360^\circ, \text{ umstellen der Formel nach } \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ \quad / \text{ einsetzen für } x$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2\pi} \cdot 360^\circ \quad / \text{ kürzen des Bruches}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ \quad / \text{ ausrechnen}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 180^\circ$$

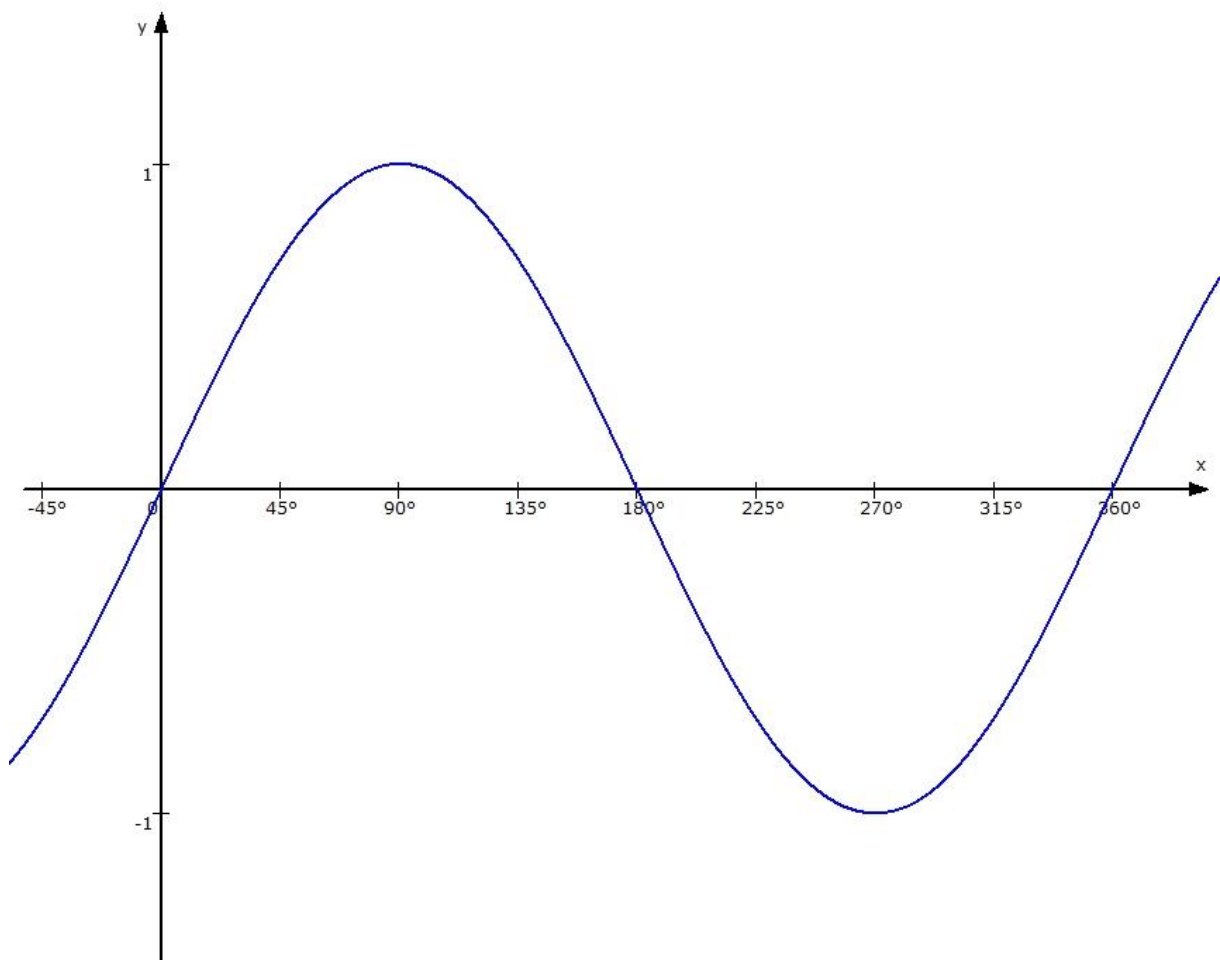
Zu dem Bogenmaß $x = \pi$ gehört also der Winkel $\alpha = 180^\circ$.

Aufgabe 161

Nullstellen sind die Stellen, an denen der Graph der Funktion die waagerechte Achse schneidet oder berührt.

Aus dem Graphen der Sinusfunktion lassen sich die gesuchten Nullstellen der Funktion ablesen.

Die Sinusfunktion besitzt im Intervall $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ die Nullstellen 0° ; 180° und 360° .



Logarithmen

Für die Lösung der Aufgaben in diesem Themenbereich sollte zunächst einmal Klarheit darüber bestehen, was unter dem Begriff Logarithmus zu verstehen ist. Des Weiteren wird die Kenntnis der Rechenregeln für Logarithmen erwartet. Mit Hilfe dieser Regeln sollen logarithmische Terme zusammengefasst oder zerlegt werden. Außerdem können Aufgaben zum Lösen einfacher logarithmischer oder exponentieller Gleichungen gestellt werden.

Definition:

Die Exponentialgleichung $a^x = b$ besitzt für $a, b > 0$ und $a \neq 1$ die Lösung $x = \log_a(b)$ und heißt **Logarithmus von b zur Basis a**.

Rechenregeln für Logarithmen:

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

$$\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\log_a(u^w) = w \cdot \log_a(u)$$

Besondere Logarithmen:

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

Aufgabe 162

Die Exponentialgleichung $a^x = b$ besitzt für $a, b > 0$ und $a \neq 1$ die Lösung $x = \log_a(b)$ und heißt **Logarithmus von b zur Basis a**.

Die Lösung der Gleichung $2^x = 9$ lautet daher $x = \log_2(9)$.

Die Klammer um das Argument darf auch weggelassen werden. Die Lösung lautet dann $x = \log_2 9$.

Aufgabe 163

Für die Lösung dieser Aufgabe ist die Kenntnis der **Rechenregeln für Logarithmen** erforderlich:

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

$$\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\log_a(u^w) = w \cdot \log_a(u)$$

$$\lg 2 + \lg x - \lg y \quad / \text{ Zur Verdeutlichung der Rechenregeln werden Klammern um die Argumente gesetzt.}$$

$$= \lg(2) + \lg(x) - \lg(y) \quad / \text{ Anwendung der ersten Rechenregel}$$

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

$$= \lg(2 \cdot x) - \lg(y) \quad / \text{ Anwendung der zweiten Rechenregel}$$

$$\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{2x}{y}\right)$$

Anmerkung: Wenn bei einem Logarithmus das 0 weggelassen wird, dann bedeutet dies, dass es sich um einen Logarithmus zur Basis 10 handelt: $\log_{10}(x) = \lg(x)$.

Themenbereich XVI

Verständnis von Graphen

(inklusive trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktion)

In diesem Themenbereich werden Aufgaben zum Verständnis von Graphen gestellt.

Dabei kann es sich z.B. um die folgenden Aufgabentypen handeln:

- Es sollen Aussagen über das Aussehen/ den Graphen einer bestimmten Funktion getroffen werden.
- Einem Graphen soll die entsprechende Funktionsgleichung zugeordnet werden.
- Einem Sachverhalt aus einer Textaufgabe soll ein passender Graph zugeordnet werden.

Aufgabe 164

Bei der abgebildeten Funktion handelt es sich um die Sinusfunktion.

Typische Merkmale der Sinusfunktion sind:

- Die Sinusfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.
- Die y-Werte liegen innerhalb des geschlossenen Intervalls von -1 bis +1. Es gilt also $-1 \leq y \leq 1$.
- Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Das heißt, dass sich der rechte Teil des Graphen (also für $x > 0$) um den Ursprung herum in den linken Teil des Graphen (also für $x < 0$) drehen lässt und umgekehrt.
- Die Funktion ist 2π -periodisch. Das heißt, es gilt $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.
- Der Graph besitzt unendlich viele Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiele: $x_0 = 0 \cdot \pi = 0$; $x_1 = 1 \cdot \pi = \pi$; $x_{-1} = -1 \cdot \pi = -\pi$ sind Nullstellen der Sinusfunktion.

Typische Merkmale der Kosinusfunktion sind:

- Die Kosinusfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.
- Die y-Werte liegen innerhalb des geschlossenen Intervalls von -1 bis +1. Es gilt also $-1 \leq y \leq 1$.
- Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Das heißt, dass sich der rechte Teil des Graphen (also für $x > 0$) an der y-Achse auf den linken Teil des Graphen (also für $x < 0$) spiegeln lässt und umgekehrt.
- Die Funktion ist 2π -periodisch. Das heißt, es gilt $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.
- Der Graph besitzt unendlich viele Nullstellen: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiele: $x_0 = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$; $x_1 = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi$; $x_{-1} = \frac{\pi}{2} - 1 \cdot \pi = -\frac{\pi}{2}$

sind Nullstellen der Kosinusfunktion.

Typische Merkmale der **Tangensfunktion** sind:

→ Die Tangensfunktion besitzt Stellen, an denen sie nicht definiert ist. Es gilt $x \in \mathbb{R}$ ohne

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi.$$

→ Für die y-Werte gilt dagegen $y \in \mathbb{R}$.

→ Die Tangensfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Das heißt, dass sich der rechte Teil des Graphen (also für $x > 0$) um den Ursprung herum in den linken Teil des Graphen (also für $x < 0$) drehen lässt und umgekehrt.

→ Die Funktion ist π - periodisch. Das heißt, es gilt $\tan(x) = \tan(x + \pi)$.

→ Der Graph besitzt unendlich viele Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiele: $x_0 = 0 \cdot \pi = 0$; $x_1 = 1 \cdot \pi = \pi$; $x_{-1} = -1 \cdot \pi = -\pi$ sind Nullstellen der Tangensfunktion.

Aufgabe 165

Dem beschriebenen Sachverhalt entspricht die Zuordnung:

Anzahl der Stunden → *Anzahl der Bakterien*.

Diese Zuordnung bedeutet, dass auf der **waagerechten Achse die Anzahl der Stunden** und auf der **senkrechten Achse die Anzahl der Bakterien** abgetragen wird.

Die Graphen a und c enthalten negative Angaben auf der waagerechten Achse. Da es aber keine negative Anzahl von Stunden geben kann, stellen diese Graphen nicht den beschriebenen Sachverhalt dar.

Zu Beginn der Beobachtung – also zum Zeitpunkt 0 – sind 2000 Bakterien vorhanden. Damit kommt der Graph d ebenfalls nicht als Lösung in Betracht.

Übrig bleibt der Graph b, der zum Zeitpunkt 0 Stunden 2000 Bakterien aufweist. Der Zunahme der Bakterien um 10% pro Stunde entspricht der leicht gekrümmte und ansteigende Verlauf des Graphen.

Themenbereich XVII

Grenzwerte

In diesem Themenbereich werden grundlegende Kenntnisse über Grenzwerte von Folgen und Funktionen erwartet. Insbesondere sollen Aussagen über das Verhalten einer Folge/Funktion im Unendlichen bzw. an einer konkreten Stelle getroffen werden. Eine Unterscheidung in links- und rechtsseitige Grenzwerte wird aber nicht erwartet. Auch die Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital sind hier nicht prüfungsrelevant.

Aufgabe 166

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{6x^2 + x + 1}$$

/ Der Grenzwert kann vom Zähler und Nenner

getrennt berechnet werden.

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x + 4)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 + x + 1)}$$

/ Sowohl der Zähler als auch der Nenner enthalten

einen ganzrationalen Term. Bei ganzrationalen

Termen entscheidet das x mit dem höchsten

Exponenten über das Verhalten im Unendlichen.

Für den Zähler gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x + 4) = \infty$

und für den Nenner $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 + x + 1) = \infty$.

Zusammen gefasst lässt sich schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{6x^2 + x + 1} = \frac{\infty}{\infty} . \text{ Der Ausdruck } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

wird als „unbestimmter Ausdruck“ bezeichnet, da

an dieser Stelle noch nicht gesagt werden kann, was

das Ergebnis dieses Ausdrucks ist. Um das Ergebnis

bestimmen zu können, sind Umformungen

erforderlich. Das x mit dem höchsten Exponenten

wird sowohl im Zähler als auch im Nenner

ausgeklammert.

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \cdot \left(6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

/ kürzen von x^2

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

/ Die Brüche $\frac{1}{x}$, $\frac{4}{x^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ werden als

„Nullfolgen“ bezeichnet, da sie für $x \rightarrow \infty$ gegen null streben.

Übrig bleiben die 3 im Zähler und die 6 im Nenner.

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 167

Besonders interessant ist die Berechnung eines Grenzwertes an einer konkreten Stelle, wie hier an der Stelle $x = 2$, wenn diese Stelle nicht definiert ist. **Mit der Berechnung des Grenzwertes an einer nicht definierten Stelle möchte man herausfinden, wie sich der Graph der Funktion an dieser besonderen Stelle verhält / wie er dort aussieht.**

Die gegebene Funktion lautet $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$. Da es sich um eine gebrochenrationale Funktion handelt, darf der Nenner nicht null werden. Für $x = 2$ wird der Nenner dieser Funktion aber null: $2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = -8 + 8 = 0$. Damit handelt es sich bei $x = 2$ um eine nicht definierte Stelle.

Anmerkungen zu den anderen Lösungsmöglichkeiten:

- zu a) Den Grenzwert einer Funktion an einer Nullstelle zu berechnen macht keinen Sinn, da man weiß, dass die y -Koordinate dort null ist. Im Übrigen ist $x = 2$ bei dieser Funktion keine Nullstelle, da zwar der Zähler für $x = 2$ null wird, aber die Funktion insgesamt für $x = 2$ nicht definiert ist.
- zu c) Eine willkürliche Aufgabenstellung gibt es in der Mathematik im Allgemeinen nicht.
- zu d) Die Höhe eines Exponenten stellt keinen Grund für die Untersuchung eines Grenzwertes an einer konkreten Stelle dar.

Die richtige Lösung ist Antwort b.

Themenbereich XVIII

Grundkenntnisse der Differentialrechnung

In diesem Themenbereich werden folgende Grundkenntnisse der Differentialrechnung erwartet:

- Was ist eine Ableitung und was kann mit ihrer Hilfe berechnet werden?
- Berechnung einfacher Ableitungen (ohne Produkt-, Quotienten- und Kettenregel)
- Berechnung von Extremstellen einfacher Funktionen

Aufgabe 168

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente des Graphen an einer Stelle x an.

Erläuterung:

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ gibt die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt $P(x, f(x))$ an. Wenn es sich bei der Funktion um eine lineare Funktion (der Funktionsgraph ist dann eine Gerade) handelt, kann die Steigung entweder direkt aus der Funktionsvorschrift (der Geradengleichung) abgelesen werden oder sie kann relativ einfach mit Hilfe eines Steigungsdreiecks berechnet werden.

Handelt es sich bei dem Funktionsgraphen aber um eine gekrümmte Kurve, dann ist die Bestimmung der Steigung an einer bestimmten Stelle x schon wesentlich komplizierter. Eine Lösung für dieses Problem besteht darin, dass im Punkt $P(x, f(x))$ eine Tangente an den Graphen gelegt wird. In diesem Punkt P stimmt dann die Steigung der Tangente mit der Steigung des Funktionsgraphen überein.

Aufgabe 169

Bei dieser Aufgabe werden die folgenden Ableitungsregeln benötigt:

- 1) Für die Ableitung $f'(x)$ einer Potenzfunktion $f(x) = ax^n$ gilt:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

- 2) Für die Ableitung von Summen- oder Differenzfunktionen gilt:

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ besteht aus Summen und Differenzen. Die

2. Ableitungsregel besagt, dass jeder Term einzeln abgeleitet werden darf:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (4x^2)' - (2x)' + (5)'$$

Nach der 1. Ableitungsregel gilt dann:

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} = x^2$$

$$\rightarrow (4x^2)' = 2 \cdot 4x^{2-1} = 8x$$

$$\rightarrow (2x)' = (2x^1)' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\rightarrow (5)' = (5x^0)' = 0 \cdot 5x^{0-1} = 0$$

Zusammengefügt lautet die 1. Ableitung:

$$f'(x) = x^2 + 8x - 2$$

Anmerkungen: $\rightarrow x^1 = x$

$$\rightarrow x^0 = 1$$

Themenbereich XIX

Grundkenntnisse der Integralrechnung

In diesem Themenbereich sollen einfache Aufgaben zur Integralrechnung gelöst werden. Die Berechnung von Flächeninhalten kann Bestandteil dieser Aufgaben sein. Es werden jedoch keine speziellen Verfahren wie z.B. Substitution, partielle Integration oder Partialbruchzerlegung erwartet.

Aufgabe 170

Die grau hervorgehobene Fläche lässt sich mit Hilfe der Formel $A = \int_{-2}^4 f(x)dx$ berechnen. Dabei stellen die Zahlen - 2 und 4 Nullstellen der Funktion dar. Die richtige Lösung lautet b.

Erläuterungen zu den anderen Antwortmöglichkeiten:

Eine alternative Lösung besteht darin, die Fläche A in zwei Teilflächen aufzuteilen, die dann ebenfalls

über Integrale berechnet werden können: $A_1 = \int_{-2}^0 f(x)dx$ und $A_2 = \int_0^4 f(x)dx$.

Die Gesamtfläche A errechnet sich dann aus der Summe der beiden Teilflächen: $A = A_1 + A_2$.

Bei den Formeln c und d werden diese Teilflächen aber subtrahiert. Damit sind die Antwortmöglichkeiten c und d auszuschließen.

Mit Hilfe des Integrals $\int_2^4 f(x)dx$ wird lediglich der Teil der grauen Fläche berechnet, der von $x = 2$ und $x = 4$ begrenzt wird. Daher ist auch die Antwortmöglichkeit a auszuschließen.

Aufgabe 171

Für die Berechnung des Integrals kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

$$\int \frac{3}{4} x^2 dx$$

/ Die $\frac{3}{4}$ dürfen vor das Integral gezogen werden.

$$= \frac{3}{4} \int x^2 dx$$

/ Anwendung der Integrationsformel

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} + c$$

/ zusammenfassen

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + c$$

/ kürzen der Brüche

$$= \frac{1}{4} x^3 + c$$